Matematica finanziaria: esercizi del libro (3 pagina 80)

Esercizio 3 a pagina 80. Si investe un capitale di 1250€ per un anno e due mesi. Calcolare il montante nei seguenti casi:

1. forza d'interesse $\delta(t) = 0.1$ (t espresso in anni);
2. forza d'interesse $\delta(t) = 0.1$ (t espresso in semestri);
3. forza d'interesse (t espresso in anni)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.08 & \text{primo anno} \\ 0.12 & \text{restante periodo} \end{cases}$$

4. forza d'interesse $\delta(t) = 1 - e^{-t}$ (t espresso in anni).

Svolgimento. Per trovare il montante serve la funzione di capitalizzazione $r(t)$. Una volta nota $r(t)$, considerato che un anno e due mesi corrisponde a $1 + \frac{2}{12} = \frac{7}{6}$ di anno, e a $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ di semestre, il montante cercato è $1250r(7/6)$ quando t misura gli anni, e $1250r(7/3)$ quando t misura i semestri.

Purtroppo $r(t)$ non viene dato (l'esercizio sarebbe troppo facile) ma viene data la sua derivata logaritmica (la forza d'interesse) che permette di ricostruire completamente $r(t)$!

Dunque l'esercizio consiste nel riuscire a trovare $r(t)$ data la sua forza d'interesse $\delta(t)$. Visto che $\delta(t)$ è la derivata logaritmica di $r(t)$, per ricostruire $r(t)$ dovremo usare l'inverso della derivata (l'integrale) e la funzione inversa del logaritmo (l'esponenziale). Detto questo, è facile ricordare la seguente formula:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,ds}. \tag{1}$$

Chiaramente, l'esercizio diventa difficile nel momento in cui non si sa fare l'integrale! Nella maggior parte dei casi, però, la forza d'interesse da integrare è molto semplice, e il suo integrale si può fare "a occhio", cioè cercando una primitiva F di δ (una funzione F la cui derivata sia δ). Se troviamo questa F, il teorema fondamentale del calcolo integrale ci dice che

$$\int_0^t \delta(s)\,ds = [F(s)]_0^t = F(t) - F(0).$$

Applichiamo quanto detto al nostro esercizio. Nel primo caso, la forza d'interesse è costante (cioè non dipende da s) e pari a 0.1. Pensiamo alla funzione più semplice che ci possa venire in mente... vediamo... la funzione costante! no... la sua derivata è zero, non va bene.

Trovato! Se derivo la funzione $F(s) = 0.1s$ (un polinomio di grado 1, cioè la funzione più semplice che si possa pensare dopo la funzione costante), ottengo proprio $F'(s) = 0.1$.

Allora applico il teorema fondamentale del calcolo integrale per fare l'integrale:

$$\int_0^t \delta(s)\,ds = \int_0^t 0.1\,ds = [0.1s]_0^t = 0.1t - 0 = 0.1t$$

e poi applico la formula (1) per ottenere:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,ds} = e^{0.1t}$$

e infine il montante

$$M_1 = 1250r(7/6) = 1250e^{7/60} = 1404.68.$$

Ora è tutto in discesa: nel secondo caso la variabile t misura il tempo in semestri, dunque avremo lo stesso risultato per l'integrale, e come montante:

$$M_2 = 1250r(7/3) = 1250e^{7/30} = 1578.5.$$

Nel terzo caso, osserviamo che la funzione da integrare è definita a tratti, tramite due funzioni costanti (delle quali sappiamo dunque le primitive). Essendo il tempo espresso in anni, la forza d'interesse è data da:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.08 & t \in [0,1] \\ 0.12 & t \in (1, 7/6] \end{cases}$$

Basta allora dividere l'integrale in due addendi, su ciascuno dei quali la funzione da integrare è costante:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7}{6}} \delta(s)\, ds &= \int_0^1 \delta(s)\, ds + \int_1^{\frac{7}{6}} \delta(s)\, ds \\ &= \int_0^1 0.08\, ds + \int_1^{\frac{7}{6}} 0.12\, ds = [0.08s]_0^1 + [0.12s]_1^{\frac{7}{6}} = (0.08 - 0) + (0.12 \cdot \frac{7}{6} - 0.12) = 0.1 \end{aligned}$$

da cui

$$M_3 = 1250r(7/6) = 1250e^{\int_0^{\frac{7}{6}} \delta(s)\, ds} = 1250e^{0.1} = 1381.46.$$

Nel quarto caso, la funzione da integrare non è costante. Come facciamo a fare l'integrale? Esattamente come lo abbiamo fatto prima, cioè trovando "a occhio" una primitiva. Dobbiamo trovare una funzione F che derivata ci dia $\delta(s) = 1 - e^{-s}$. Dividiamo la funzione da integrare in due addendi: 1 e e^{-s}. Una primitiva di 1 la sappiamo già, è $F_1(s) = s$. Una primitiva di e^{-s}... vediamo... se derivo e^s viene ancora e^s... ci sono quasi... se derivo e^{-s} viene $-e^{-s}$... accidenti, devo riuscire a togliere il segno meno... se derivo $-e^{-s}$ viene $-(-e^{-s}) = e^{-s}$!!! Dunque una primitiva di e^{-s} è $F_2(s) = -e^{-s}$, e una primitiva di $1 - e^{-s}$ è

$$F(s) = F_1(s) - F_2(s) = s + e^{-s}.$$

Facciamo la prova, non si sa mai...

$$F'(s) = (s + e^{-s})' = 1 + (e^{-s})(-1) = 1 - (e^{-s}) = 1 - e^{-s} = \delta(s).$$

Funziona!

Applico il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t (1 - e^{-s})\, ds = [s + e^{-s}]_0^t = (t + e^{-t}) - (0 + e^0) = t + e^{-t} - 1$$

Allora, per la formula (1), abbiamo:

$$r(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\, ds} = e^{t + e^{-t} - 1}$$

e infine il montante

$$M_4 = 1250r(7/6) = 1250e^{\frac{7}{6} + e^{-7/6} - 1} = 2016.2.$$

■